محمدصادق نوذری

زاویهٔ بین دو عقربه

اشاره

در برخی از کتاب‌ها فرمولی برای محاسبه زاویه بین دو عقربه ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار می‌آورند، در این مقاله به نحوه شکل‌گیری و استفاده از این فرمول می‌پردازیم.

مسئلهٔ ۱. در ساعت ۱۴:۴۵′ زاویهٔ بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار چند درجه است؟

مسئلهٔ ۲. در ساعت ۲۱:۳۰′:۴۵″ زاویهٔ بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار چند درجه است؟

مسئلهٔ ۳. بین ساعت ۴ و ۵ صبح، لحظه‌ای که دو عقربهٔ ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار بر هم منطبق می‌شوند، به کدام‌یک از لحظه‌های زیر نزدیک‌ترند؟

۱. ۴:۲۰′ ۲. ۴:۲۱′

۳. ۴:۲۲′ ۴. ۴:۲۳′

هدف از بحث زیر آن است که آمادگی پاسخ‌گویی به هر یک از سؤال‌های فوق را به دست آورید. بدین منظور ابتدا لازم است به نکات زیر توجه کنید:

نکته ۱. وضع عقربه‌ها هر ۱۲ ساعت مجدداً تکرار می‌شود. مثلاً عقربه‌ها در ساعت ۴:۴۵′:۱۵″ عیناً به همان وضعی قرار دارند که در ساعت ۱۶:۴۵′:۱۵″ هستند. بنابراین در تعیین زاویهٔ بین دو عقربهٔ مذکور در ساعت h:m′:n″ اگر زمان مربوط به بعد از ساعت ۱۲ باشد، یعنی h>۱۲، می‌توان از h، ۱۲ واحد کم کرد و

زاویهٔ بین دو عقربه را در ساعت $h_1:m':n''$ که $0<h_1=h-12<12$ و همچنین $0<m<60$ و $0<n<60$ به دست آورد.

پس در مسئلهٔ ۱ زاویهٔ بین دو عقربه در ساعت $2:45'$ و در مسئلهٔ ۲ زاویهٔ بین دو عقربه را در ساعت $9:30':45''$ به دست می‌آوریم.

نکتهٔ ۲. عقربهٔ ساعت‌شمار در هر یک ساعت (۶۰ دقیقه یا 60^2 ثانیه) به اندازهٔ $\frac{1}{12}\times 360^\circ$ یعنی 30° می‌چرخد. (چرا؟)

مثال. در مدت $30':45''$ هر یک از عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار چند درجه می‌چرخند؟

پاسخ:

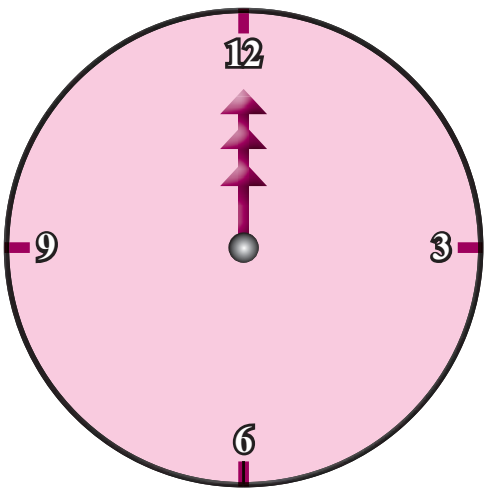
مقدار چرخش ساعت‌شمار:

$$\frac{30}{60}\times 30^\circ+\frac{45}{(60)^2}\times 30^\circ=15/375 \text{ درجه}$$

مقدار چرخش دقیقه‌شمار:

$$\frac{30}{5}\times 30^\circ+\frac{45}{5\times 60}\times 30^\circ=184/5 \text{ درجه}$$

نکتهٔ ۳. مبدأ حرکت را برای عقربه‌ها لحظهٔ $0:00':00''$ که در شکل نشان داده شده است، در نظر می‌گیریم.

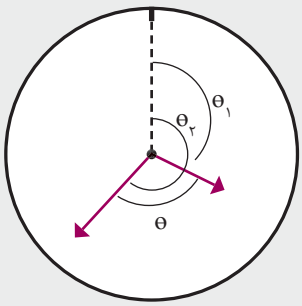


نقشهٔ حل مسئله

- θ_1، مقدار چرخش ساعت‌شمار از **مبدأ** پس از h ساعت و m دقیقه و n ثانیه را به دست می‌آوریم.
- θ_2، مقدار چرخش دقیقه‌شمار را از مبدأ پس از m دقیقه و n ثانیه به دست می‌آوریم.

تذکر: مقدار h در تعیین θ_2 تأثیری ندارد، زیرا دقیقه‌شمار رأس هر ساعت حرکت خود را از مبدأ مجدداً آغاز می‌کند.

θ: زاویهٔ بین دو عقربه $= |\theta_1-\theta_2|$



$\theta_2>\theta_1 \rightarrow \theta=\theta_2-\theta_1$

$\theta_1>\theta_2 \rightarrow \theta=\theta_1-\theta_2$

تعیین زاویهٔ بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در ساعت $h:m':n''$ به نحو زیر است:

زاویهٔ چرخش ساعت‌شمار به درجه $=\theta_1=30h+\frac{m}{60}\times 30+\frac{n}{(60)^2}\times 30$

زاویهٔ چرخش دقیقه‌شمار به درجه $=\theta_2=\frac{m}{5}\times 30+\frac{n}{5\times 60}\times 30$

زاویهٔ بین دو عقربه $=\theta=|\theta_1-\theta_2|=|30h-\frac{11}{2}m-\frac{11}{120}n|$

مسئلهٔ ۱. زاویهٔ بین دو عقربه در ساعت $14:45'$ همان زاویهٔ بین دو عقربه در ساعت $2:45'$ است:

$$\theta=|2\times 30-\frac{11}{2}\times 45|=|60-242/5|=182/5 \text{ درجه}$$

مسئلهٔ ۲. $21:30':45''$ همان $9:30':45''$ است:

$$\theta=|9\times 30-\frac{11}{2}\times 30-\frac{11}{120}\times 45|$$
$$=|270-165-4/125|=101/875$$

مسئلهٔ ۳. زاویهٔ بین دو عقربه در ساعت $4:m'$ برابر است با:

$$|4\times 30-\frac{11}{2}m|=0$$

$$m=\frac{240}{11}=21/8$$ به ۲۲ دقیقه نزدیک‌تر است: